

绝密★启用前

考试号

2019 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

(课程代码 02198)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

$$1. \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

A. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix}$

C. $3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

D. $6 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $PA =$

A. $\begin{pmatrix} 2a_1 & 3a_2 & 4a_3 \\ 2b_1 & 3b_2 & 4b_3 \\ 2c_1 & 3c_2 & 4c_3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 3b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 4c_3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 2a_3 \\ b_1 & 3b_2 & b_3 \\ 4c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{pmatrix}$

3. 设向量组 $\alpha_1 = (3, -1, a, 1)$, $\alpha_2 = (-6, 2, 4, b)$ 线性相关, 则必有

A. $a = -2, b = -2$

B. $a = -2, b = 2$

C. $a = 2, b = -2$

D. $a = 2, b = 2$

4. 设 3 阶矩阵 A 满足 $|3A - 2E| = 0$, 则 A 必有一个特征值为

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2$ 的规范形为

A. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

B. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

C. $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

D. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} a-2 & b-3 & c-4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 则 $\left| \frac{1}{2} A^* \right| = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设向量 $\beta = (2, 1, 4)^T$ 可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (-2, -3, a)^T$ 线性表示, 则数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解, 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 也是 $Ax = b$ 的解, 则数 k_1, k_2, k_3 满足关系式 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则数 k 应满足的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 2 阶矩阵 A 的特征值为 -3 和 2, 则 $|A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 3 阶矩阵 A 与 B 相似, A 的特征值为 1, -2, 3, 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ 的矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求

(1) 矩阵 X , 使得 $2X + 3A = 4B$;

(2) AB^T .

18. 已知矩阵 X 满足关系式 $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, -1, -3)^T$, $\alpha_3 = (1, -2, 8, 8)^T$,

$\alpha_4 = (2, 3, 8, 9)^T$ 的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = a \end{cases}$$

确定数 a 为何值时, 方程组有无穷多解, 并求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似,

(1) 确定数 x 与 y 的值;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

22. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 为标准形, 并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题: 本题 7 分.

23. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + c_1\alpha_4, \alpha_2 + c_2\alpha_4, \alpha_3 + c_3\alpha_4$ 线性无关 (其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数).

2019 年 10 月自考线性代数 02198 试题答案及评分参考

2019 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数试题答案及评分参考

(课程代码 02198)

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。

1. A 2. D 3. A 4. C 5. B

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 1

$$7. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$9. \frac{1}{2}$$

10. 0

$$11. k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

12. $k \neq 1$

$$13. -\frac{1}{6}$$

14. 36

$$15. \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

$$16. \text{解} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

17. 解 (1) $X = \frac{1}{2}(4B - 3A) = \begin{pmatrix} 7/2 & 8 & 7 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 5分

(2) $AB^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 1 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$ 9分

18. 解 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4分

$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 9分

19. 解 由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 2分

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5分

因此向量组的秩为3, 一个极大无关组是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 9分

(答案不惟一)

20. 解 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right)$ 4分

当 $a = 5$ 时, $r(A) = r(A, b) = 2 < 3$. 方程组有无穷多解.

此时, 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 1 \\ x_2 = 3x_3 - 1 \end{cases}$. 由此得非齐次线性方程组的特解

$\eta^* = (1, -1, 0)^T$, 导出组的一个基础解系为 $\xi = (-1, 3, 1)^T$.

从而, 线性方程组的通解为 $\eta^* + k\xi$, 其中 k 是任意常数.9分

21. 解 (1) 由于 A 与 B 相似, 故 $|A| = |B|$ 且 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

所以 $-x = 2y$ 且 $x = 2 + 1 + y$, 得到 $x = 2, y = -1$ 5 分

(2) 由于 A 与 B 相似, B 是对角矩阵, 故 A 的特征值也是 $2, 1, -1$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 方程组 $(2E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 方程组 $(E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_2 = (0, 1, 1)^T$

当 $\lambda_3 = -1$ 时, 方程组 $(-E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_3 = (0, -1, 1)^T$

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 由于 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 则 P 可逆

且满足 $P^{-1}AP = B$ 9 分

22. 解 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$$= x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$$

$$= (x_1 - x_3)^2 + x_2^2 - (x_2 - x_3)^2 \quad \text{.....5 分}$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}, \text{ 从而经可逆线性变换 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

将二次型化为标准形 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 9 分

四、证明题: 本题 7 分。

23. 证 设存在常数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\alpha_1 + c_1\alpha_4) + k_2(\alpha_2 + c_2\alpha_4) + k_3(\alpha_3 + c_3\alpha_4) = 0$$

$$\text{整理得 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + (k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3)\alpha_4 = 0 \quad \text{.....4 分}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 推出 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

所以向量组 $\alpha_1 + c_1\alpha_4, \alpha_2 + c_2\alpha_4, \alpha_3 + c_3\alpha_4$ 线性无关.7 分