

2017 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数 试卷

(课程代码 02198)

本试卷共 4 页, 满分 100 分, 考试时间 150 分钟。

考生答题注意事项:

1. 本卷所有试题必须在答题卡上作答。答在试卷上无效, 试卷空白处和背面均可作草稿纸。
2. 第一部分为选择题。必须对应试卷上的题号使用 2B 铅笔将“答题卡”的相应代码涂黑。
3. 第二部分为非选择题。必须注明大、小题号, 使用 0.5 毫米黑色字迹签字笔作答。
4. 合理安排答题空间, 超出答题区域无效。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 n 阶可逆矩阵 A, B, C 满足 $ABC = E$, 则 $C =$

A. AB B. BA C. $A^{-1}B^{-1}$ D. $B^{-1}A^{-1}$

2. 设 A 为 3 阶矩阵且 $r(A) = 1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r(BA) =$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)$, $\beta = (1, 3, 6)$, 则

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关
B. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
C. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法惟一
D. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示法不惟一

4. 设 A 为 2 阶矩阵, 且 $|3A^T - 5E| = 0$, 则 A 必有一个特征值为

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{5}{3}$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ 的秩为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 100 & 101 \\ 102 & 103 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

7. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=1$, 则 $|-2A|$ =_____.

8. 设 n 阶矩阵 A 的所有元素都是 1, 则 $r(A)$ =_____.

9. 设 A 为 2 阶矩阵, 将 A 的第 1 行与第 2 行交换得到矩阵 B , 则 $|A+B|$ =_____.

10. 设 3 维向量 $\alpha=(3,-1,2)^T$, $\beta=(3,1,4)^T$, 若向量 γ 满足 $2\alpha+\gamma=3\beta$, 则 γ =_____.

11. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 有惟一解, 则数 λ 的取值范围为_____.

12. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值为 1, 1, 5, 则数 x =_____.

13. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 且矩阵 B 与 A 相似, 则 $|B^2+E|$ =_____.

14. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3)$, $\alpha_2=(2,2,k)$ 正交, 则数 k =_____.

15. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 - x_3^2$ 的矩阵 A =_____.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 1$, 求 A^* 及 $f(A^*)$.

18. 已知矩阵 A, B 满足 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 4)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, -2, -2)^T$, $\alpha_4 = (-1, -5, 11, 8)^T$ 的一个极大线性无关组, 并将向量组中的其余向量用该极大线性无关组线性表出.

20. 设 3 元齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
 确定 a 为何值时, 方程组有非零解,

并求其通解.

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

22. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 为正定二次型, (1) 确定 t 的取值范围; (2) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

四、证明题: 本题 7 分.

23. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$,

$\beta_3 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 证明向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

线性代数试题答案及评分参考

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。

1. D 2. B 3. C 4. A 5. C

6. -2 7. -8

8. 1 9. 0

10. $(3, 5, 8)^T$ 11. $\lambda \tau - 1$

12. 3 13. 100

14. -2
15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

16. 解

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$-6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48 \quad \text{.....9 分}$$

17. 解

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} f(A^*) &= (A^*)^2 - 5A^* + E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

18. 解 由于 $|A| = 1 \neq 0$, 所以矩阵 A 可逆.2 分

经计算

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 9 \text{ 分}$$

19. 解

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -2 & 11 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad \cdots\cdots 9 \text{ 分}$$

(答案不惟一)

20. 解 由方程组的系数行列式 $|A| = 2(a-3) = 0$, 得 $a=3$

此时 $r(A) = 2 < 3$, 方程组有非零解4 分

$$\text{当 } a=3 \text{ 时, } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到基础解系 $\xi = \left(0, -\frac{3}{2}, 1 \right)^T$ 7 分

通解为 $k\xi$ (k 为任意常数).9 分

21. 解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

所以 A 的 3 个特征值分别为 1, 2, 54 分

解方程组 $(E - A)x = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (0, -1, 1)^T$;

解方程组 $(2E - A)x = 0$ 得基础解系 $\xi_2 = (1, 0, 0)^T$;

解方程组 $(5E - A)x = 0$ 得基础解系 $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$ 7 分

$$\text{取 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = A$ 9 分

22. 解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,2 分

由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定二次型, 则 A 的顺序主子式

$$|1| > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \quad |A| = 4 - 2t^2 > 0$$

解得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ 6 分

(2) 由于二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定, 所以规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ 9 分

四、证明题：本题 7 分。

23. 证 由于

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价.

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基. \cdots \cdots 7 \text{ 分}